Felix Rodmann

1 Folgen

Aufgabe 1:

a) $\left(1-\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) \Rightarrow a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$= \frac{n+1-n}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{n\cdot(n+1)} \Rightarrow \underline{\underline{0}} \Rightarrow \underline{\underline{\text{Konvergiert}}}$$

b) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right), \left(\sqrt{3}-\sqrt{4}\right), \left(\sqrt{4}-\sqrt{5}\right) \Rightarrow a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty - \infty = \underline{\underline{0}} \Rightarrow \underline{\underline{\text{konvergiert}}}$$

Aufgabe 3:

$$a_n = \left(1 - \frac{(-1)^n}{n}\right) \qquad \varepsilon = 10^{-6} \qquad n_0 \in \mathbb{N}\ ?$$

$$|a_n - a| < \varepsilon, \ \forall n > n_0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \left(1 - \frac{(-1)^n}{n}\right) = (1-0) \Rightarrow \underline{a=1}$$

$$|a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \left|\left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right) - 1\right| < \varepsilon$$

$$= \left|-\frac{(-1)^n}{n}\right| < \varepsilon$$

$$= \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n = \frac{1}{\varepsilon} = 1/10^{-6}$$

$$\Rightarrow \underline{n = 10^6}$$

$$\underline{\underline{n_0 = 10^6, \text{damit } |a_n - a| < \varepsilon}}$$

Aufgabe 4:

$$a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$$

$$a_1 = \frac{1}{n^2} = \underline{1} \qquad \frac{1}{1} \quad 1$$

$$a_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^2} = \underline{\frac{3}{4}} \qquad \frac{3}{4} \quad 3$$

$$a_3 = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^2} = \frac{6}{9} = \underline{\frac{2}{3}} \qquad \frac{6}{9} \quad 6$$

$$a_4 = \frac{1}{4^2} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^2} + \frac{4}{4^2} = \frac{10}{16} = \underline{\frac{5}{8}} \qquad \frac{10}{16} \quad 10$$

Zähler entspricht der Folge: $\frac{n(n+1)}{2}$ $\Leftarrow$ Gauss

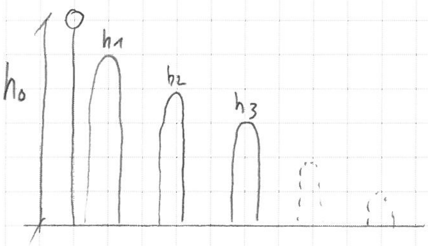
$$a_4 = \sum_{k=1}^{4} \frac{k}{4^2} = \frac{4(4+1)}{2 \cdot 4^2}$$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{\cancel{n} \cdot (n+1)}{2 \cdot n^{\cancel{2}}} = \frac{n+1}{2n}$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{n+1}{2n} = \frac{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})}{2\cancel{n}} = \frac{1+0}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

2 Reihen

2.1 Geometrische Reihe



$$s = h_0 + 2 \cdot h_1 + 2 \cdot h_2 + 2 \cdot h_3 + \dots + 2 \cdot h_n$$
$$= h_0 + 2(h_1 + h_2 + \dots + h_n)$$
$$= h_0 + 2(q \cdot h_0 + q^2 \cdot h_0 + \dots + q^n \cdot h_0)$$
$$= \underbrace{h_0}_{} + 2 \cdot h_0 (q + q^2 + \dots q^n)$$
$$= 2 \cdot h_0 - h_0 + 2 \cdot h_0 (q + q^2 + \dots + q^n)$$
$$= -h_0 + 2 \cdot h_0 (1 + q + q^2 + \dots + q^n)$$
$$= -h_0 + \sum_{k=0}^{n} 2h_0 \cdot q^k = -h_0 + \sum_{k=0}^{\infty} 2h_0 \cdot q^k$$
$$= -h_0 + \frac{2h_0}{1-q} \qquad \text{da } |q| < 1$$
$$= \frac{-h_0(1-q) + 2h_0}{1-q} = \frac{h_0(q-1+2)}{1-q} = \underline{\underline{h_0 \cdot \frac{1+q}{1-q}}}$$

Dauer: $h_0 = \frac{g}{2} \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot h_0}{g}} \Rightarrow \underline{\underline{t_{ges} = \sqrt{\frac{2g}{h}} \cdot \frac{1+\sqrt{q}}{1-\sqrt{q}}}}$

2.2 Notwendige Bedingungen für Konvergenz

a) $\sum_{k=1}^{\infty} (2k+1)$ Konvergiert nicht, da $2k+1 \to \infty$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ $\lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k = e \approx 2,718$

$\Rightarrow$ Konvergiert nicht

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{5^k}\right)$ $\lim_{k\to\infty} \left(\frac{k}{5^k}\right) = 0$ $\Rightarrow$ könnte konvergieren weitere Untersuchungen

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)\cdot 5^k}{k\cdot 5^{k+1}} = \frac{k+1}{k^5} = \frac{1+\frac{1}{k}}{5}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{5} < 1$$

$\Rightarrow$ Konvergiert

2.3 Leibniz - Kriterium

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}\right|$

- alternierend, weil $(-1)^{k+1}$
- konvergent, weil Nenner > Zähler

b) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot e^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \underbrace{\frac{1}{e^k}}_{\frac{1}{e^1} + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} + \frac{1}{e^x}}$

- konvergiert, da monoton abnehmende Folge

2.4 Absolute Konvergenz einer Reihe

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{3k}$

2.5 Quotientenkriterien

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k!}$ $\quad k! > 3^k \Rightarrow$ Nullfolge

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{3^{k+1} \cdot k!}{3^k (k+1)!} = \frac{3}{k+1}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{3}{k+1} = 0 \qquad \rho < 1 \Rightarrow \underline{\underline{\text{konvergent}}}$$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{k^2}$ $\quad 4^k > k^2 \Rightarrow \underline{\underline{\text{divergiert}}}$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ $\quad 2^k > k \Rightarrow$ Nullfolge

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1) \cdot 2^k}{k \cdot 2^{k+1}} = \frac{k+1}{2k} = \frac{1 + 1/k}{2}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1 + 1/k}{2} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \underline{\underline{\text{konvergiert}}}$$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^3}$ $\quad k! > k^3 \Rightarrow \underline{\underline{\text{divergiert}}}$

2.6 Fehler in Approximation

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$; $|\varepsilon| < 10^{-4}$ $\qquad a_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k} \Rightarrow |a_k| = \frac{1}{k}$

$$\varepsilon = |s - s_n| \leq a_{n+1}$$

$$\Rightarrow a_{k+1} \geq \varepsilon \quad \Rightarrow \frac{1}{k+1} \geq 10^{-4} \quad \Rightarrow \underline{\underline{k = 10^4}}$$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$; $|\varepsilon| < 10^{-5}$ $\qquad a_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \Rightarrow |a_k| = \frac{1}{k!}$

$$a_{k+1} \geq \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{(k+1)!} \geq 10^{-5}$$

Maple: fsolve($1/(k+1) = 10^{-5}$, k) $\Rightarrow 7{,}4196 \Rightarrow \underline{\underline{8}}$