Fundamentals - Übung SS2 Ⓐ

Felix Rohrer

1. lineare / binäre Suche

Liste $= \{1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11\} = a$

$x = 5$

Lineare Suche: jedes Element in der Liste mit x vergleichen:

$a_0 = 5$? $\rightarrow$ $a_0 = 1 \neq 5$ (falsch)
$a_1 = 5$? $\rightarrow$ $a_1 = 3 \neq 5$ (falsch)
$a_2 = 5$? $\rightarrow$ $a_2 = 4 \neq 5$ (falsch)
$a_3 = 5$? $\rightarrow$ $a_3 = 5 = 5$ (wahr) $\rightarrow$ gefunden: Index = 3 $\quad O(n)$

Binäre Suche: Liste vor der Suche jeweils halbieren bis nur noch 1 Element:

$L_1 = \{1, 3, 4, 5\}$ $\quad L_2 = \{6, 8, 9, 11\}$ $\quad \Rightarrow L_1$

$L_3 = \{1, 3\}$, $L_4 = \{4, 5\}$ $\quad \Rightarrow L_4$

$L_5 = \{4\}$, $L_6 = \{5\}$ $\quad O(\log(n))$

$L_6 = 5$? $\rightarrow$ $L_6 = \{5\} = 5$ (wahr) $\rightarrow$ gefunden: $L_6 \Rightarrow$ Index 3

2. KR 3.2, Aufgabe 1b, 1c

$$|3x + 7| = 3x + 7 \quad (k \geq 1)$$
$$\leq 3x + 7x$$
$$= 10x$$

$k = 1$; $C = 10$; $O(x)$

$$|x^2 + x + 1| = x^2 + x + 1 \quad (k \geq 1)$$
$$\leq x^2 + x^2 + x^2$$
$$= 3x^2$$

$k = 1$; $C = 3$; $O(x^2)$

$\Rightarrow O(x)$ ist für $f(x) = 3x + 7$ gültig.

3. KR 3.2, Aufgabe 19c

$$|(n! + 2^n)(n^3 + \log(n^2+1))| \quad | \text{ immer positiv}$$
$$= (n! + 2^n)(n^3 + \log(n^2+1)) \quad | \text{ ausmultiplizieren}$$
$$= n! \cdot n^3 + n! \cdot \log(n^2+1) + 2^n \cdot n^3 + 2^n \cdot \log(n^2+1) \quad | \text{ ① } n \geq 2 \quad \log(n^2+1) \rightarrow 3 \cdot \log(n)$$
$$\leq n! \cdot n^3 + n! \cdot 3 \cdot \log(n) + 2^n \cdot n^3 + 2^n \cdot 3 \cdot \log(n) \quad | \log(n) < n$$
$$\leq n! \cdot n^3 + n! \cdot 3n + 2^n \cdot n^3 + 2^n \cdot 3n \quad | \ n < n^3$$
$$\leq n! \cdot n^3 + n! \cdot 3n^3 + 2^n \cdot n^3 + 2^n \cdot 3n^3 \quad | \text{ vereinfachen}$$
$$= 4 \cdot n! \cdot n^3 + 4 \cdot 2^n \cdot n^3 \quad | \text{ ② } n \geq 4 \quad 2^n \rightarrow n!$$
$$\leq 4 \cdot n! \cdot n^3 + 4 \cdot n! \cdot n^3 \quad | \text{ vereinfachen}$$
$$= 8 \cdot n! \cdot n^3$$

$k = 4$; $C = 8$; $O(n! \cdot n^3)$

① $\log(n^2+1)$ $\quad | \; n \geq 1$

$\leq \log(n^2 + n^2)$

$= \log(2n^2)$

$= \log(2) + \log(n^2)$

$= \log(2) + 2 \cdot \log(n)$ $\quad | \; n \geq 2$

$\leq \log(n) + 2 \cdot \log(n)$

$= 3 \cdot \log(n)$

② Wenn ist $2^n \leq n!$? $\Rightarrow n \geq 4$ $\quad 2^4 = 16, \; 4! = 24$ $\quad 2^3 = 8, \; 3! = 6$

I 3.2, Aufgabe 21

a) $n \cdot \log(n^2+1) + n^2 \cdot \log(n)$ wieso? $\Rightarrow \underline{\underline{O(n^2 \cdot \log(n))}}$ $\quad C = 2, \; k = 3$

b) $(n \cdot \log(n) + 1)^2 + (\log(n) + 1)(n^2+1)$

$= \underline{n^2 \cdot \log(n)^2} + 2 \cdot n \cdot \log(n) + 1 + n^2 \cdot \log(n) + \log(n) + n^2 + 1 \Rightarrow \underline{\underline{O(n^2 \cdot \log(n)^2)}}$ $\quad C = 4, \; k = 3$

c) $n^{2^n} + n^{n^2}$ $\Rightarrow \underline{\underline{O(n^{2^n})}}$ $\quad C = 2, \; k = 4$

4. KR 3.4, Aufgabe 5

Zeigen Sie: $\forall a, b \in \mathbb{Z} \; (a | b \wedge b | a \rightarrow a = b \vee a = -b)$ // $\mathbb{Z}$ ≙ ganz Zahlen

$\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$ wenn $a = b$ oder $a = -b$

$\frac{5}{5} = \frac{5}{5}$ wahr $\quad \frac{5}{-5} = \frac{-5}{5}$ wahr

5. KR 3.4, Aufgabe 17

① Rest muss positiv sein, weil divisor positiv ist !
n und m $\neq 0$

$\boxed{n = a \cdot m + b}$ $\quad 0 \leq b < m$

a) $13 \bmod 3 = 4 \cdot 3 + 1 \Rightarrow$ Rest $\underline{\underline{1}}$

① b) $-97 \bmod 11 = -9 \cdot 11 + 2 \Rightarrow$ Rest $\underline{\underline{2}}$

c) $155 \bmod 19 = 8 \cdot 19 + 3 \Rightarrow$ Rest $\underline{\underline{3}}$

① d) $-221 \bmod 23 = -10 \cdot 23 + 9 \Rightarrow$ Rest $\underline{\underline{9}}$

6. KR 3.5, Aufgabe 3f

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53

Primfaktor

909'090	/ 37
24570	/ 13
1890	/ 7
270	/ 5
54	/ 3
18	/ 3
6	/ 3
2	/ 2

$\underline{\underline{2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37}}$

7. KR 3.5, Aufgabe 13c   12, 17, 31, 37

teilerfremd: kein Teiler ausser 1 (in $\mathbb{Z}$)

$ggT(12,17) = 1$ $ggT(12,31) = 1$ $ggT(12,37) = 1$

$ggT(17,31) = 1$ $ggT(17,37) = 1$

$ggT(31,37) = 1$

ggT ist jeweils 1 $\Rightarrow$ Die Zahlen 12, 17, 31, 37 sind paarweise prim.

8. KR 3.5, Aufgabe 21a

$ggT(3^7 \cdot 5^3 \cdot 7^3,\ 2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^9) = 3^5 \cdot 5^3$ // gemeinsam, kleinsten exp

9. KR 3.5, Aufgabe 23a

$kgV(3^7 \cdot 5^3 \cdot 7^3,\ 2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^9) = 2^{11} \cdot 3^7 \cdot 5^9 \cdot 7^3$ // alle, grösster exp

10. KR 3.6, Aufgabe 3d

14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

$110\ 1001\ 0001\ 0000_2$ in dez?

$1 \cdot 2^{14} + 2^{13} + 2^{11} + 2^8 + 2^4 = 26896$

11. KR 3.6 Aufgabe 5b

$135AB_{Hex}$ in Bin?   A = 10, B = 11

0001 0011 0101 1010 1011

12. KR 3.6 Aufgabe 10

$1\ 1000\ 0110\ 0011_{bin}$ in Hex?

1 8 6 3 1863_{hex}

II KR 3.6, Aufgabe 23d

ggT(12345, 54321)   Euklidische Algorithmus

54321 / 12345 = 4 Rest 4941

12345 / 4941 = 2 Rest 2463

4941 / 2463 = 2 Rest 15

2463 / 15 = 164 Rest 3

15 / 3 = 5 Rest 0

ggT ist 3. ✓

13. KR 3.8, Aufgabe 3b

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\\2 & 3\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}3 & -2 & -1\\1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B = \begin{array}{cc|ccc} & & 3 & -2 & -1\\ & & 1 & 0 & 2\\ \hline 1 & -1 & 2 & -2 & -3\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 9 & -4 & 4\end{array} = \begin{pmatrix}2 & -2 & -3\\1 & 0 & 2\\9 & -4 & 4\end{pmatrix}$$

III KR 3.8, Aufgabe 5

$$\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 4\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix}3 & 0\\1 & 2\end{pmatrix}$$

1) $2a + 3c = 3$
2) $2b + 3d = 0$
3) $1a + 4c = 1$
4) $1b + 4d = 2$

1+3) $2(1-4c) + 3c = 3$
$2 - 8c + 3c = 3$
$-5c = 1$
$c = -1/5$

$a = 1 - 4(-1/5)$
$a = 1 + 4/5$
$a = 9/5$

2+4) $2(2-4d) + 3d = 0$
$4 - 8d + 3d = 0$
$5d = +4$
$d = 4/5$

$b = 2 - 4(4/5)$
$b = 2 - 16/5$
$b = -6/5$

$$A = \begin{pmatrix}9/5 & -6/5\\-1/5 & 4/5\end{pmatrix}$$ ✓

14. KR 3.8, Aufgabe 11

Anz Zeilen A = Anz Spalten B
und
Anz Spalten A = Anz Zeilen B

$$A=\begin{pmatrix}\circ & \circ\\\circ & \circ\\\circ & \circ\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}\circ & \circ & \circ\\\circ & \circ & \circ\end{pmatrix}$$

15. KR 3.8, Aufgabe 19

$A \cdot A^{-1} = I_n$

I_n = Einheitsmatrix $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\-c & a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

Beispiel: $\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}4 & -2\\-3 & 1\end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1\\3/2 & -1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|cc} & \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc}\\ & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc}\\ \hline a \quad b & \frac{ad}{ad-bc} + \frac{b(-c)}{ad-bc} & \frac{a(-b)}{ad-bc} + \frac{ba}{ad-bc}\\ c \quad d & \frac{cd}{ad-bc} + \frac{d(-c)}{ad-bc} & \frac{c(-b)}{ad-bc} + \frac{da}{ad-bc}\end{array}$$

$$\frac{ad-bc}{ad-bc} = 1 \qquad \frac{-ab+ab}{ad-bc} = \frac{0}{\dots} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{cd-cd}{ad-bc} = \frac{0}{\dots} = 0 \qquad \frac{ad-bc}{ad-bc} = 1$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

5/5

Ma + Inf

F. Rohrer

16. KR 3.8, Aufgabe 29

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) $A \vee B = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}} = \left(\begin{matrix} A_{11} \vee B_{11} \\ A_{21} \vee B_{21} \end{matrix} \middle| A_{12} \vee B_{12} \middle| A_{13} \vee B_{13} \right)$

(Zeile · Spalte)

b) $A \wedge B = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}$

c) $A \odot B$

	reel		bool
	$\odot$	=	$\wedge$
	$+$	=	$\vee$

$$\begin{array}{c|c|c|c}
 & \multicolumn{3}{c}{B} \\
 & \begin{matrix}0\\1\\1\end{matrix} & \begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix} & \begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix} \\
\hline
A\;\; 1\;0\;1 & (1\wedge0)\vee(0\wedge1)\vee(1\wedge1) & (1\wedge1)\vee(0\wedge0)\vee(1\wedge0) & (1\wedge1)\vee(0\wedge1)\vee(1\wedge1) \\
\hline
1\;1\;0 & (1\wedge0)\vee(1\wedge1)\vee(0\wedge1) & (1\wedge1)\vee(1\wedge0)\vee(0\wedge0) & (1\wedge1)\vee(1\wedge1)\vee(0\wedge1) \\
\hline
0\;0\;1 & (0\wedge0)\vee(0\wedge0)\vee(1\wedge1) & (0\wedge1)\vee(0\wedge0)\vee(1\wedge0) & (0\wedge1)\vee(0\wedge1)\vee(1\wedge1)
\end{array}$$

$$A \odot B = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$

17. KR 3.8, Aufgabe 31

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) $A^{[2]} = A \odot A$

$$\begin{array}{c|ccc}
 & 1\,0\,0 & & \\
 & 1\,0\,1 & & \\
 & 0\,1\,0 & & \\
\hline
1\,0\,0 & a & b & c \\
1\,0\,1 & d & e & f \\
0\,1\,0 & g & h & i
\end{array}$$

$a = (1\wedge1) \vee \ldots = 1$
$b = (1\wedge0) \vee (0\wedge0) \vee (0\wedge1) = 0$
$c = (1\wedge0) \vee (0\wedge1) \vee (0\wedge0) = 0$
$d = (1\wedge1) \ldots = 1$
$e = (1\wedge0) \vee (0\wedge0) \vee (1\wedge1) = 1$
$f = (1\wedge0) \vee (0\wedge1) \vee (1\wedge0) = 0$
$g = (0\wedge1) \vee (1\wedge0) \vee (0\wedge1) = 0$
$h = (0\wedge0) \vee (1\wedge0) \vee (0\wedge0) = 0$
$i = (0\wedge0) \vee (1\wedge1) = 1$

$$A^{[2]} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$

b) $A^{[3]} = A \odot A^{[2]}$

$$\begin{array}{c|ccc}
 & \multicolumn{3}{c}{A^{[2]}} \\
 & 1 & 0 & 0 \\
 & 1 & 1 & 0 \\
 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
A\; 1\,0\,0 & 1 & 0 & 0 \\
1\,0\,1 & 1 & 0 & 1 \\
0\,1\,0 & 1 & 1 & 0
\end{array}$$

$$A^{[3]} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}}$$

c) $A \vee A^{[2]} \vee A^{[3]} =$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \vee \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A^{[2]}} \vee \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A^{[3]}} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}}$$