Foundations – Übung SW2 ISSM

A

Lucerne University of
Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE
LUZERN
www.hslu.ch

Felix Rohrer

Logik:

1. $p \land (q \lor r) \equiv (p \land q) \lor (p \land r)$

$\land$ and
$\lor$ or

p	q	r	$q \lor r$	$p \land (q \lor r)$	$p \land q$	$p \land r$	$(p \land q) \lor (p \land r)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

I. $p \lor (p \land q) \equiv p$

p	q	$p \land q$	$p \lor (p \land q)$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

✓

2. $\neg p \Leftrightarrow q$ und $p \Leftrightarrow \neg q$ sind logisch äquivalent

p	q	$\neg p$	$\neg q$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	0	0

Falls $\neg p$ und q den gleichen Wert haben, haben auch p und $\neg q$ den gleichen Wert.

II. $(p \rightarrow q) \land (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ Tautologie $(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \lor q)$!

p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \land (q \rightarrow r)$	$(p \rightarrow q) \land (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1 ✓	1 ✓	1 ✓	1 ✓	1 ✓

Tautologie (immer wahr)

Felix Rohrer

3. logische Äquivalenz

$$(p \to q) \land (q \to r) \Rightarrow (p \to r) \qquad (p \to q) \equiv (\neg p \lor q)$$

$$((\neg p \lor q) \land (\neg q \lor r)) \Rightarrow (\neg p \lor r)$$

$$\equiv \neg[(\neg p \lor q) \land (\neg q \lor r)] \lor (\neg p \lor r)$$

$$\equiv [\neg(\neg p \lor q) \lor \neg(\neg q \lor r)] \lor (\neg p \lor r)$$

$$\equiv (p \land \neg q) \lor (q \land \neg r) \lor \neg p \lor r$$

$$\equiv ((p \land \neg q) \lor \neg p) \lor ((q \land \neg r) \lor r)$$

$$\equiv ((p \lor \neg p) \land (\neg q \lor \neg p)) \lor ((q \lor r) \land (\neg r \lor r))$$

$$\equiv (T \land (\neg q \lor \neg p)) \lor ((q \lor r) \land T)$$

$$\equiv (\neg q \lor \neg p) \lor (q \lor r)$$

$$\equiv \neg q \lor \neg p \lor q \lor r$$

$$\equiv (\neg q \lor q) \lor \neg p \lor r$$

$$\equiv T \lor \underbrace{\neg p \lor r}$$

$$\equiv T \lor (\neg p \lor r) \equiv (p \to r) \qquad \Rightarrow \text{Tautologie}$$

4. Prädikate und Quantoren

$P(x)$ "$x = x^2$"

a)	$P(0)$	$0 = 0^2$	$0 = 0$	wahr	
b)	$P(1)$	$1 = 1^2$	$1 = 1$	wahr	
c)	$P(2)$	$2 = 2^2$	$2 = 4$	falsch	
d)	$P(-1)$	$-1 = (-1)^2$	$-1 = 1$	falsch	
e)	$\exists x\, P(x)$	z.B. $x = 1$	$1 = 1^2$	$1 = 1$	wahr (siehe b))
f)	$\forall x\, P(x)$	z.B. $x = 2$	$2 = 2^2$	$2 = 4$	falsch (siehe c))

III.

a)	$\forall n\,(n+1 > n)$	$n = 5$	$5+1 > 5$	wahr	✓
b)	$\exists n\,(2n = 3n)$	$n = 0$	$2 \cdot 0 = 3 \cdot 0$	wahr	✓
c)	$\exists n\,(n = -n)$	$n = 0$	$0 = -0$	wahr	✓
d)	$\forall n\,(n^2 \geq n)$	$n \cdot n \geq n \quad \mid : n$			

$$n \geq 1$$

Fall 1: $n = 0$
$0^2 \geq 0$ wahr

Fall 2: $n \geq 1$
$n \geq 1$ wahr
z.B. $2 \geq 1$ wahr

Fall 3: $n < 0$
$n \leq 1$ wahr
z.B. $-5 \leq 1$ wahr ✓

SW2 3/4

Felix Rohrer

5.

a) $\forall n \exists m \; (n^2 < m)$

$\Rightarrow$ wahr $\qquad m > n^2 + 1$ $\quad$ für n^2 kann man +1 rechnen

b) $\exists n \exists m \; (n + m = 4 \wedge n - m = 1)$

$n - m = 1$
$n = m + 1$

$n + m = 4$
$m + 1 + m = 4$
$2m = 3$
$m = 1{,}5$
$m = 3/2$

$n = 1{,}5 + 1$
$n = 2{,}5$
$n = 5/2$

$\Leftarrow \mathbb{R}$ wir haben jedoch nur $\mathbb{Z}$ somit keine Lösungen!

$\Rightarrow$ falsch

6.

$\forall x \exists y \; (xy = 1)$

a) $\mathbb{R} - \{0\}$ $\qquad y = 1/x \quad \Rightarrow$ wahr

b) $\mathbb{Z} - \{0\}$ $\qquad y = 1/x \quad \Rightarrow$ falsch, bei $x = 1$ würde es stimmen, sonst ist es nicht in $\mathbb{Z}$.

c) $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ $\quad y = 1/x \Rightarrow$ wahr, x ist nur positiv - somit kann y auch nur positiv sein.

7. Beweise

a und b sind zwei ungerade, ganze Zahlen.
Die Summe von a und b ergibt eine gerade Zahl.

$$\left.\begin{array}{l} a = 2x + 1 \\ b = 2y + 1 \end{array}\right\} \; a + b = 2x + 1 + 2y + 1 = 2x + 2y + 2 = 2(x + y + 1)$$

Die Summe von a und b ist doppelt so gross wie $x + y + 1$, somit ist das Ergebnis immer eine gerade Zahl.

IV

n ist eine positive ganze Zahl $\quad (n \in \mathbb{N}^+)$

$p \Leftrightarrow q$

a) n ungerade $\rightarrow$ $5n + 6$ ungerade $\Rightarrow 5(2x + 1) + 6$
$\Rightarrow 10x + 5 + 6$
$\Rightarrow 10x + 11$
$\Rightarrow 2(5x + 5) + 1$ ✓

$p \rightarrow q$

ungerade Zahl: $2 \cdot (\text{ganz Zahl}) + 1$

b) $5n + 6$ ungerade $\rightarrow$ n ungerade

$\neg p \rightarrow \neg q$ $\qquad \Rightarrow 5(2x) + 6$
$\Rightarrow 10x + 6$
$\Rightarrow 2(5x + 3)$

Kontrapos:
$a \rightarrow b \equiv \neg b \rightarrow \neg a$!

gerade Zahl: $2(\text{ganze Zahl})$

Flek Rohrer

8. Mengen

Potenzmenge von $\{a, b\}$

Potenzmenge: alle Teilmengen

$P = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

9. $A = \{1,2,3,4,5\}$ $B = \{0,3,6\}$

a) $A \cup B = \{0,1,2,3,4,5,6\}$

b) $A \cap B = \{3\}$

c) $A \setminus B = \{1,2,4,5\}$

d) $B \setminus A = \{0,6\}$

10. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

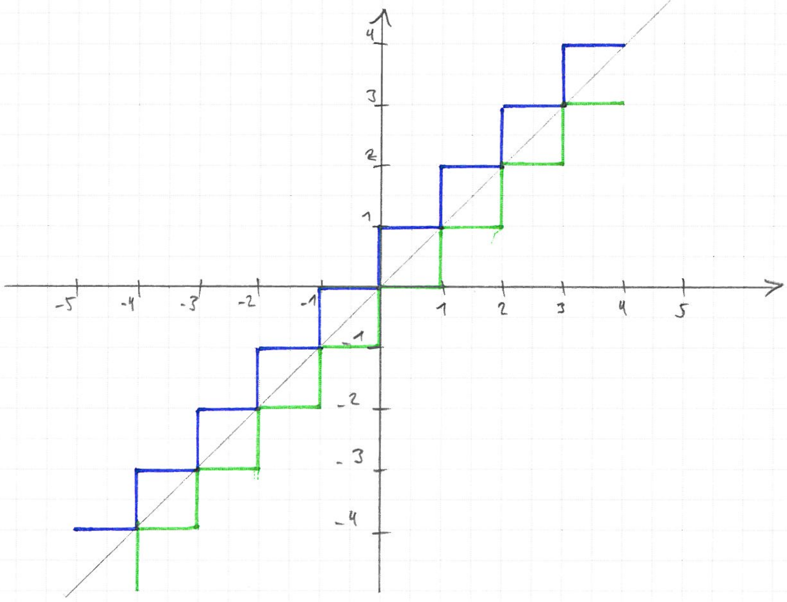
A	B	$\overline{A \cup B}$	$\overline{A} \cap \overline{B}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

11. a) 0011100000
b) 1010010001
c) 0111001110

12. a) $\{1,2,3,4,7,8,9,10\}$
b) $\{2,4,5,6,7\}$
c) $\{1,10\}$

V Anz $\emptyset \cdot 2 \Rightarrow W_b = \{0, 2, 4, \dots, 2n\}$ ✓ $D = \{$alle Bitstrings$\}$ ✓

13.



$\lceil \cdot \rceil$

$\lfloor \cdot \rfloor$

a) $\lceil \frac{3}{4} \rceil = 1$

b) $\lceil 1.1 \rceil = 2$

c) $\lfloor -0.1 \rfloor = -1$

14. bijektiv: "umkehrbar eindeutig" $\underline{\underline{a}}$

15. $\underline{\underline{a}}$